

# Optique Géométrique

---

## CHAPITRE 5

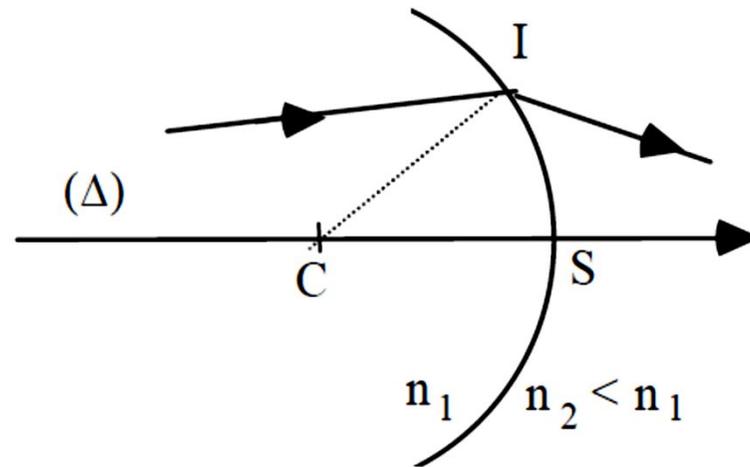
# Dioptré sphérique

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

---

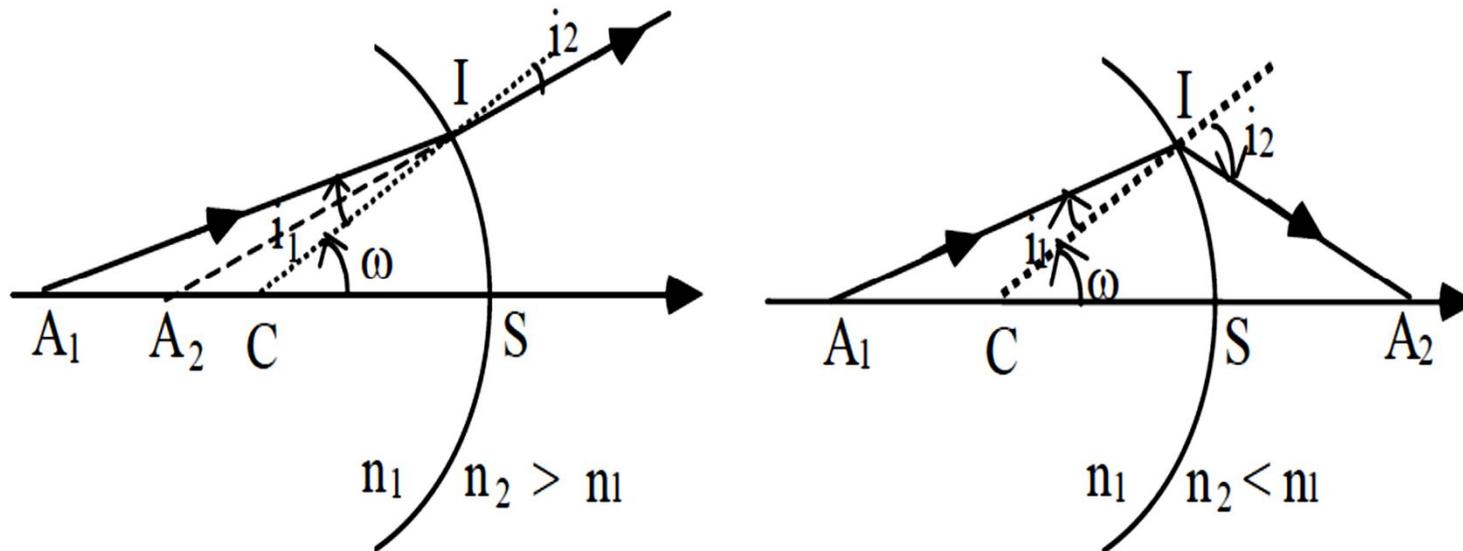
# Définition

Un dioptre sphérique est une portion de surface sphérique réfringente séparant deux milieux homogènes et transparents d'indices différents. Il est caractérisé par son axe  $\Delta$ , son centre  $C$ , son rayon de courbure  $\rho$ , son sommet  $S$  et les indices  $n_1$  et  $n_2$  des deux milieux qu'il sépare.



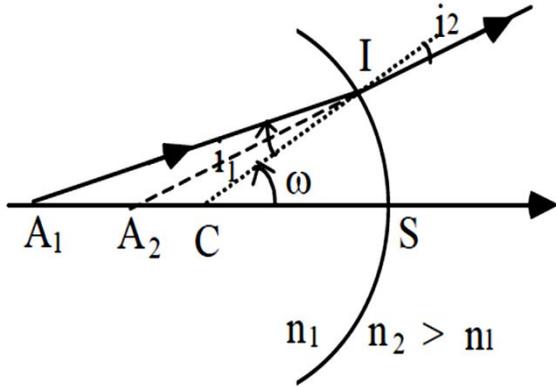
# Invariant fondamental (1)

Soit un rayon lumineux incident  $A_1I$  issu d'un point objet  $A_1$  situé sur l'axe. Selon que  $n_1$  est supérieur ou inférieur à  $n_2$ , il lui correspond un rayon réfracté  $IT$  qui se rapproche ou s'éloigne de la normale  $IC$  mais dont le support coupe toujours l'axe en un point  $A_2$ .



# Invariant fondamental (2)

Dans tous les cas de figures, les triangles  $CIA_1$  et  $CIA_2$  permettent d'écrire :



$$\frac{CA_1}{\sin i_1} = \frac{IA_1}{\sin(\pi - \omega)} = \frac{IA_1}{\sin \omega} \Rightarrow CA_1 = IA_1 \frac{\sin i_1}{\sin \omega}$$

$$\frac{CA_2}{\sin i_2} = \frac{IA_2}{\sin(\pi - \omega)} = \frac{IA_2}{\sin \omega} \Rightarrow CA_2 = IA_2 \frac{\sin i_2}{\sin \omega}$$

$$\Rightarrow \frac{CA_1}{CA_2} = \frac{IA_1 \sin i_1}{IA_2 \sin i_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{CA_1}{CA_2} = \frac{-\overline{CA_1}}{-\overline{CA_2}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{CA_2}} \\ n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\overline{CA_1}}{\overline{CA_2}} = \frac{\overline{IA_1}}{\overline{IA_2}} \cdot \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \boxed{n_1 \frac{\overline{CA_1}}{\overline{IA_1}} = n_2 \frac{\overline{CA_2}}{\overline{IA_2}}}$$

*Ce qui montre que la quantité  $n \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}}$  est invariante dans la traversée du dioptre sphérique : c'est un invariant fondamental qui est d'une grande importance dans l'étude des dioptres sphériques.*

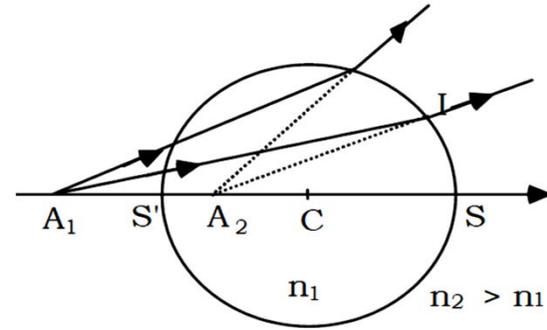
# Stigmatisme rigoureux (1)

Pour les surfaces sphériques, on a également stigmatisme rigoureux lorsque  $A_1$  est confondu avec le centre  $C$  : les rayons issus de  $C$  traversent le dioptre sans déviation et le point  $C$  est sa propre image. Mis à part ces cas, le stigmatisme rigoureux n'est réalisé que si la distance  $CA_2$  est indépendante de l'angle  $\omega$ . Comme on a  $CA_2 = \frac{IA_2}{IA_1} \cdot \frac{n_2}{n_1} CA_1$  pour que  $CA_2$  soit constant pour une position donnée de  $A_1$  de l'objet, il faut que le rapport  $\frac{IA_2}{IA_1}$  le soit également. Dans le cas où le point d'incidence  $I$  se déplace sur une sphère de diamètre  $SS'$ , les deux points  $A_1$  et  $A_2$ , tels que le rapport  $\frac{IA_2}{IA_1} = k = cte$  existent : ils appartiennent à la droite  $SS'$  et vérifient la relation :

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = -\frac{\overline{S'A_1}}{\overline{S'A_2}} = k = \frac{IA_1}{IA_2}$$

# Stigmatisme rigoureux (2)

Les points  $A_1$  et  $A_2$  qui sont conjugués par rapport à la sphère et qui réalisent le stigmatisme rigoureux sont uniques; ils sont appelés “**points de Weierstrass**”. Pour trouver leur position, supposons que le point  $I$  est successivement en  $S$  ou en  $S'$ .



L'invariant fondamental du dioptre sphérique permet d'écrire :

$$\frac{\overline{SA_2}}{n_2 \overline{CA_2}} = \frac{\overline{SA_1}}{n_1 \overline{CA_1}}$$
$$\frac{\overline{S'A_2}}{n_2 \overline{CA_2}} = - \frac{\overline{S'A_1}}{n_1 \overline{CA_1}}$$

# Stigmatisme rigoureux (3)

En ajoutant membre à membre les deux relations précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\overline{SA_2}}{n_2 \overline{CA_2}} + \frac{\overline{S'A_2}}{n_2 \overline{CA_2}} &= \frac{\overline{SA_1}}{n_1 \overline{CA_1}} - \frac{\overline{S'A_1}}{n_1 \overline{CA_1}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{SA_2 + S'A_2}}{n_2 \overline{CA_2}} &= \frac{\overline{SA_1 - S'A_1}}{n_1 \overline{CA_1}} \\ \overline{SA_2 + S'A_2} &= \overline{SC} + \overline{CA_2} + \overline{S'C} + \overline{CA_2} = 2\overline{CA_2} \\ \overline{SA_1 - S'A_1} &= \overline{SA_1} + \overline{A_1S'} = \overline{SS'} = 2\overline{SC} \\ \Rightarrow \frac{2\overline{CA_2}}{n_2 \overline{CA_2}} &= \frac{2\overline{SC}}{n_1 \overline{CA_1}} \Rightarrow \boxed{\overline{CA_1} = \frac{n_2}{n_1} \overline{SC} = -\frac{n_2}{n_1} \overline{CS}}\end{aligned}$$

# Stigmatisme rigoureux (4)

En retranchant membre à membre les deux relations comme précédemment, on obtient :

$$\frac{\overline{SA_2}}{n_2 \overline{CA_2}} - \frac{\overline{S'A_2}}{n_2 \overline{CA_2}} = \frac{\overline{SA_1}}{n_1 \overline{CA_1}} + \frac{\overline{S'A_1}}{n_1 \overline{CA_1}} \Rightarrow \frac{\overline{SA_2} - \overline{S'A_2}}{n_2 \overline{CA_2}} = \frac{\overline{SA_1} + \overline{S'A_1}}{n_1 \overline{CA_1}}$$
$$\overline{SA_2} - \overline{S'A_2} = \overline{SC} + \overline{CA_2} - \overline{S'C} - \overline{CA_2} = \overline{SS'} = 2\overline{SC}$$
$$\overline{SA_1} + \overline{S'A_1} = \overline{SC} + \overline{CA_1} + \overline{S'C} + \overline{CA_1} = 2\overline{CA_1}$$
$$\Rightarrow \frac{2\overline{SC}}{n_2 \overline{CA_2}} = \frac{2\overline{CA_1}}{n_1 \overline{CA_1}} \Rightarrow \boxed{\overline{CA_2} = \frac{n_1}{n_2} \overline{SC} = -\frac{n_1}{n_2} \overline{CS}}$$

On remarque le produit des deux relations trouvées conduit à :

$$\boxed{\overline{CA_1} \cdot \overline{CA_2} = \overline{SC}^2 = \overline{S'C}^2}$$

# Stigmatisme approché

---

Le stigmatisme approché est réalisé au voisinage des positions de stigmatisme rigoureux. En effet lorsque le point objet  $A_1$  est très proche du centre  $C$  (respectivement du point de Weierstrass  $W_1$ ), le point image  $A_2$  a une position fixe indépendante de  $I$  et proche de  $C$  (respectivement du point de Weierstrass  $W_2$ ). **Lorsque le point objet a une position quelconque, le stigmatisme approché est réalisé dans le cas des rayons paraxiaux, c'est-à-dire lorsque  $I$  est proche de  $S$ .**

---

# Relations de conjugaison

*On étudiera le dioptre sphérique dans le cadre de l'approximation de Gauss.*

---

# Origine au centre $C$ (1)

$I$  et  $S$  étant pratiquement confondus, l'invariant fondamental du dioptre sphérique devient :

$$n_1 \frac{\overline{CA_1}}{\overline{SA_1}} = n_2 \frac{\overline{CA_2}}{\overline{SA_2}}$$

Injectons le centre  $C$  dans la relation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} n_1 \frac{\overline{CA_1}}{\overline{SC} + \overline{CA_1}} &= n_2 \frac{\overline{CA_2}}{\overline{SC} + \overline{CA_2}} \\ \Rightarrow n_1 \overline{CA_1} (\overline{SC} + \overline{CA_2}) &= n_2 \overline{CA_2} (\overline{SC} + \overline{CA_1}) \\ \Rightarrow n_1 \overline{CA_1} \cdot \overline{SC} + n_1 \overline{CA_1} \cdot \overline{CA_2} &= n_2 \overline{CA_2} \cdot \overline{SC} + n_2 \overline{CA_2} \cdot \overline{CA_1} \\ \Rightarrow n_2 \overline{CA_2} \cdot \overline{SC} - n_1 \overline{CA_1} \cdot \overline{SC} &= (n_1 - n_2) \overline{CA_1} \cdot \overline{CA_2} \end{aligned}$$

# Origine au centre $C$ (2)

En divisant par  $\overline{CA_1} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{CA_2}$ , il vient :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow n_2 \frac{\overline{CA_2} \cdot \overline{SC}}{\overline{CA_1} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{CA_2}} - n_1 \frac{\overline{CA_1} \cdot \overline{SC}}{\overline{CA_1} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{CA_2}} \\ &= (n_1 - n_2) \frac{\overline{CA_1} \cdot \overline{CA_2}}{\overline{CA_1} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{CA_2}} \Rightarrow \frac{n_2}{\overline{CA_1}} - \frac{n_1}{\overline{CA_2}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{\overline{CA_2}} - \frac{n_2}{\overline{CA_1}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}}$$

# Origine au sommet $S$ (1)

On part toujours sur l'hypothèse que  $I$  et  $S$  confondus.

L'invariant fondamental du dioptre sphérique est alors :

$$n_1 \frac{\overline{CA_1}}{\overline{SA_1}} = n_2 \frac{\overline{CA_2}}{\overline{SA_2}}$$

Injectons-y le sommet  $S$ , on obtient :

$$\begin{aligned} n_1 \frac{\overline{CS} + \overline{SA_1}}{\overline{SA_1}} &= n_2 \frac{\overline{CS} + \overline{SA_2}}{\overline{SA_2}} \Rightarrow n_1 \overline{SA_2} (\overline{CS} + \overline{SA_1}) \\ &= n_2 \overline{SA_1} (\overline{CS} + \overline{SA_2}) \\ \Rightarrow n_1 \overline{SA_2} \cdot \overline{CS} + n_1 \overline{SA_2} \cdot \overline{SA_1} &= n_2 \overline{SA_1} \cdot \overline{CS} + n_2 \overline{SA_1} \cdot \overline{SA_2} \\ \Rightarrow n_1 \overline{SA_2} \cdot \overline{CS} - n_2 \overline{SA_1} \cdot \overline{CS} &= (n_2 - n_1) \overline{SA_1} \cdot \overline{SA_2} \end{aligned}$$

# Origine au sommet $S$ (2)

En divisant par  $\overline{SA_1} \cdot \overline{CS} \cdot \overline{SA_2}$ , il vient :

$$\Rightarrow n_1 \frac{\overline{SA_2} \cdot \overline{CS}}{\overline{SA_1} \cdot \overline{CS} \cdot \overline{SA_2}} - n_2 \frac{\overline{SA_1} \cdot \overline{CS}}{\overline{SA_1} \cdot \overline{CS} \cdot \overline{SA_2}} = (n_2 - n_1) \frac{\overline{SA_1} \cdot \overline{SA_2}}{\overline{SA_1} \cdot \overline{CS} \cdot \overline{SA_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{CS}} \Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}}$$

## Remarques :

- Si  $\overline{SC} \rightarrow \infty$ , on retrouve la formule du dioptre plan

$$\frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} = 0 \Rightarrow \frac{n_1}{\overline{SA_1}} = \frac{n_2}{\overline{SA_2}}$$

# Origine au sommet $S$ (3)

- Si  $n_1 = -n_2$ , on retrouve la formule du miroir sphérique

$$\frac{1}{SA_1} + \frac{1}{SA_2} = \frac{2}{SC}$$

- Regroupons différemment les termes de la relation trouvée :

$$\frac{n_1}{SA_1} - \frac{n_2}{SA_2} = \frac{n_1 - n_2}{SC} = \frac{n_1}{SC} - \frac{n_2}{SC}$$

$$\Rightarrow n_1 \left( \frac{1}{SC} - \frac{1}{SA_1} \right) = n_2 \left( \frac{1}{SC} - \frac{1}{SA_2} \right)$$

*Cette expression est aussi une forme invariante du dioptre sphérique*

# Origine au sommet S (4)

$\tan \omega = \frac{\overline{HI}}{\overline{HC}} \approx \omega \quad \tan \alpha_1 = \frac{\overline{HI}}{\overline{HA}} \approx \alpha_1$

$\tan \alpha_2 = \frac{\overline{HI}}{\overline{HA'}} \approx \alpha_2$

$\Delta ACI \Rightarrow \omega = \alpha_1 + i_1 \Rightarrow \frac{\overline{HI}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{HA}} + i_1$

$\Delta A'CI \Rightarrow \omega = \alpha_2 + i_2 \Rightarrow \frac{\overline{HI}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{HA'}} + i_2$

*Angle petit*  
 $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \Rightarrow n_1 i_1 = n_2 i_2$

$\Rightarrow n_1 \left( \frac{\overline{HI}}{\overline{HC}} - \frac{\overline{HI}}{\overline{HA}} \right) = n_2 \left( \frac{\overline{HI}}{\overline{HC}} - \frac{\overline{HI}}{\overline{HA'}} \right) \Rightarrow n_1 \left( \frac{1}{\overline{HC}} - \frac{1}{\overline{HA}} \right) = n_2 \left( \frac{1}{\overline{HC}} - \frac{1}{\overline{HA'}} \right)$

# Origine au sommet $S$ (4)

Dans l'approximation des petits angles,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{S}$  sont pratiquement confondus ; d'où :

$$\Rightarrow n_1 \left( \frac{1}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA}} \right) = n_2 \left( \frac{1}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA'}} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{\overline{SA}} - \frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}}$$

Cette relation de conjugaison du dioptre sphérique permet de calculer la position  $A'$  par rapport à  $S$  connaissant celle de  $A$ . Elle est valable algébriquement, que  $n_1$  soit supérieur ou inférieur à  $n_2$ . Inversement, elle permet de trouver la position de  $A$  si celle de  $A'$  est connue.

---

# Foyer image, foyer objet, distance focale, vergence

*Pour déterminer la position des foyers, il suffit de faire tendre dans l'expression obtenue pour l'origine au sommet  $S$ ,  $\overline{SA_1}$  ou  $\overline{SA_2}$  vers l'infini.*

# Foyer objet $F_1$

Il correspond à la position  $F_1$  du point  $A_1$  lorsque l'image  $A_2$  est à l'infini ou plus simplement  $F_1$  est le point sur lequel il faut mettre l'objet pour que l'image soit à l'infini . On aura alors :

$$\frac{n_1}{\overline{SF_1}} - \frac{n_2}{\infty} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$$
$$\Rightarrow \frac{n_1}{\overline{SF_1}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \Rightarrow \boxed{\overline{SF_1} = \frac{n_1}{n_1 - n_2} \overline{SC}}$$

**C'est la distance focale objet**

# Foyer image $F_2$ (1)

Il correspond à la position  $F_2$  de l'image  $A_2$  lorsque l'objet  $A_1$  est à l'infini. On a donc :

$$-\frac{n_2}{\overline{SF_2}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \Rightarrow \boxed{\overline{SF_2} = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \overline{SC}} \quad \text{C'est la distance focale image}$$

On remarque que les deux expressions se déduisent l'une de l'autre par permutation des indices, ce qui est prévisible. Comme

$$\left. \begin{array}{l} \overline{SF_1} = \frac{n_1}{n_1 - n_2} \overline{SC} \\ \overline{SF_2} = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \overline{SC} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\overline{SF_1}}{\overline{SF_2}} = -\frac{n_1}{n_2}} \quad (a) \text{ et } \boxed{\overline{SF_1} + \overline{SF_2} = \overline{SC}} \quad (b)$$

# Foyer image $F_2$ (2)

- La première équation (a) montre que **les foyers sont toujours situés de part et d'autre du sommet du dioptre**. Ainsi, si  $F_1$  est dans le milieu 1,  $F_1$  est réel,  $F_2$  est dans le milieu 2, donc  $F_2$  est aussi réel ; par contre, si  $F_1$  est dans le milieu 2,  $F_1$  est virtuel,  $F_2$  se trouve du côté du milieu 1,  $F_2$  est aussi virtuel.
- La deuxième équation (b) montre, quant à elle, que le milieu du segment  $F_1F_2$  coïncide avec le milieu du segment  $SC$  : **les foyers sont donc symétriques par rapport au milieu de  $SC$**  :

$$\overline{SF_1} = \overline{F_2C}$$

et

$$\overline{SF_2} = \overline{F_1C}$$

*Cela traduit simplement que contrairement au miroir sphérique, il n'y a jamais de foyer entre  $S$  et  $C$  pour un dioptre sphérique.*

# Distance focale et vergence

La distance focale est donnée par :

$$f' = \overline{SF_2} = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \overline{SC} = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$$

et la vergence est définie par :

$$C = \frac{n_2}{f'} = \frac{n_2}{\overline{SF_2}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} C_{\text{Objet}} = \frac{n_1}{\overline{SA_1}} \\ C_{\text{Image}} = \frac{n_2}{\overline{SA_2}} \end{array} \right\} \Rightarrow C_{\text{Objet}} - C_{\text{Image}} = C$$

# Dioptries convergents et dioptries divergents (1)

---

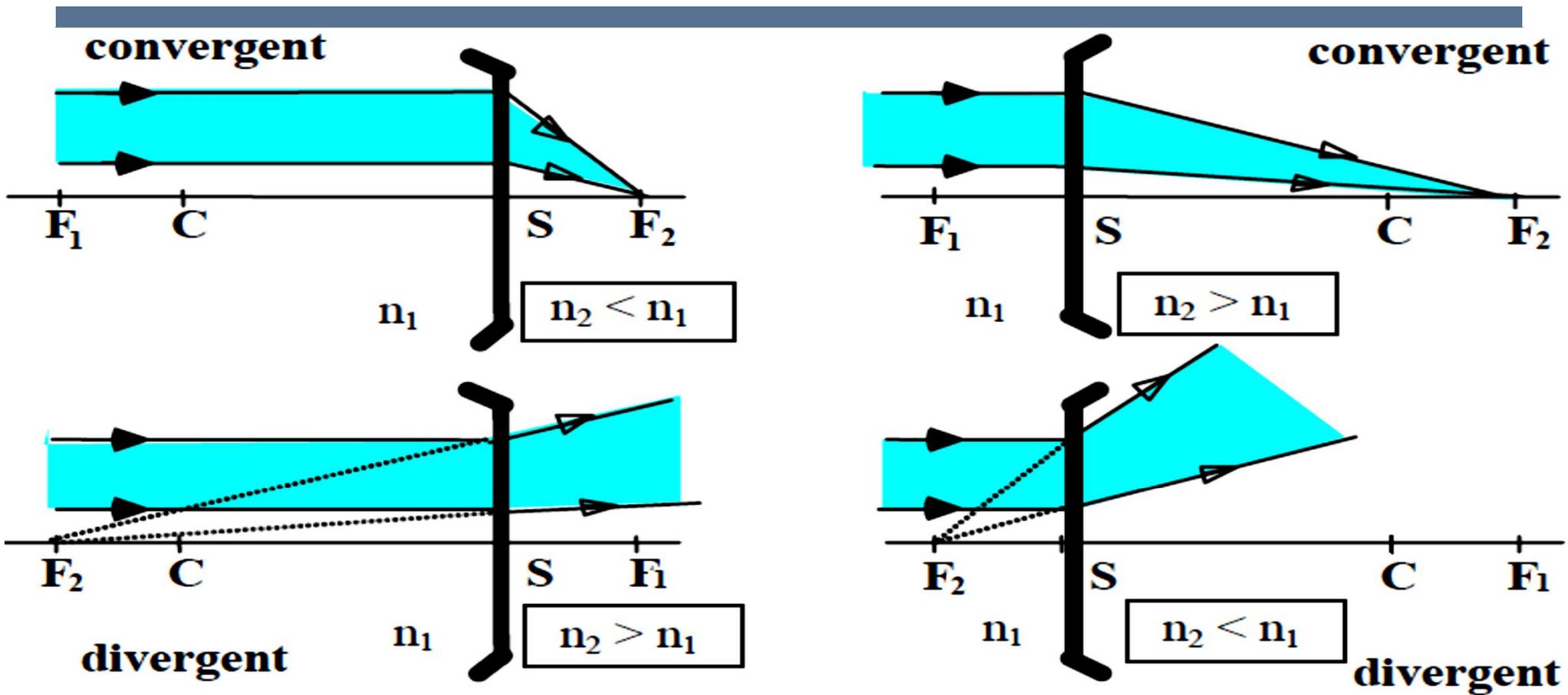
La vergence est une grandeur algébrique :

- si  $n_2 - n_1$  et  $\overline{SC}$  sont de **même signe**, alors **la vergence  $C$  est positive et le dioptre est dit convergent.**
- si  $n_2 - n_1$  et  $\overline{SC}$  sont de **signes contraires**, alors **la vergence  $C$  est négative et le dioptre est dit divergent.**

On remarquera que **les dioptries à foyers réels sont convergents** et **les dioptries à foyers virtuels sont divergents.**

Nous présentons, sur la figure suivante, les quatre dispositions possibles des points  $S$ ,  $C$ ,  $F_1$  et  $F_2$ .

# Dioptries convergentes et dioptries divergentes (2)



**Remarques: un miroir sphérique concave est toujours convergent et un miroir sphérique convexe est toujours divergent**

# Dioptries convergents et dioptries divergents (3)

Remarque :

$$\frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$$
$$\Rightarrow \frac{\overline{SC}}{n_1 - n_2} \cdot \left( \frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} \right) = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \cdot \frac{\overline{SC}}{n_1 - n_2} = 1$$

En utilisant les relations définissant la position des foyers

$$\overline{SF_1} = \frac{n_1}{n_1 - n_2} \overline{SC} \quad \text{et} \quad \overline{SF_2} = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \overline{SC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{SA_1}} \cdot \frac{n_1}{n_1 - n_2} \overline{SC} - \frac{1}{\overline{SA_2}} \cdot \frac{n_2}{n_2 - n_1} \overline{SC} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{SF_1}}{\overline{SA_1}} + \frac{\overline{SF_2}}{\overline{SA_2}} = 1$$

# Relations de conjugaison avec origine aux foyers. Formule de Newton

Injectons  $F_1$  et  $F_2$  dans la relation précédente, on obtient :

$$\frac{\overline{SF_1}}{\overline{SF_1} + \overline{F_1A_1}} + \frac{\overline{SF_2}}{\overline{SF_2} + \overline{F_2A_2}} = 1$$

$$\Rightarrow \overline{SF_1}(\overline{SF_2} + \overline{F_2A_2}) + \overline{SF_2}(\overline{SF_1} + \overline{F_1A_1}) = (\overline{SF_2} + \overline{F_2A_2}) \cdot (\overline{SF_1} + \overline{F_1A_1})$$

Il vient après calcul, la formule de Newton :

$$\Rightarrow \boxed{\overline{SF_1} \cdot \overline{SF_2} = \overline{F_1A_1} \cdot \overline{F_2A_2}}$$

---

# Construction de l'image d'un point objet perpendiculaire à l'axe

---

# Rayons particuliers

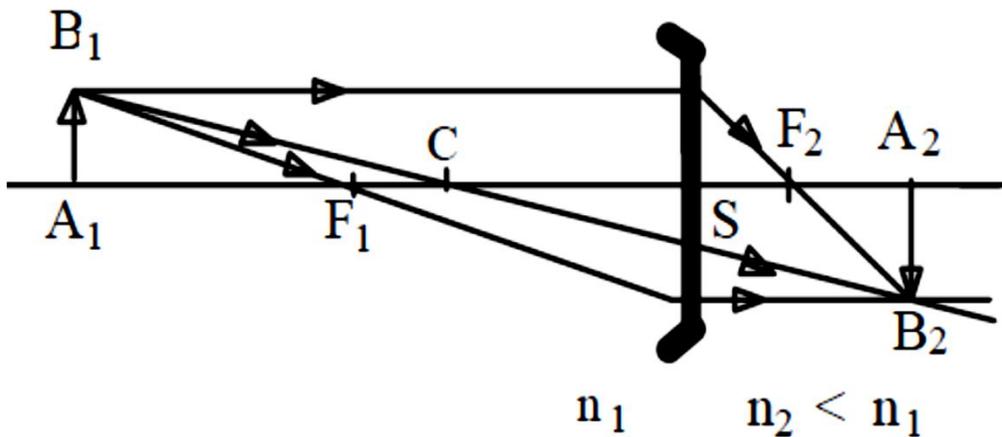
- Tout rayon incident passant par le centre  $C$  ne subit aucune déviation,
- Tout rayon incident parallèle à l'axe, se réfracte en passant par le foyer image  $F_2$ ,
- Tout rayon incident passant par le foyer objet  $F_1$  se réfracte parallèlement à l'axe.
- Tout rayon passant par le sommet  $S$  se trouve dévié en respectant la loi de Snell-Descartes.

L'image d'un objet  $A_1B_1$  perpendiculaire à l'axe s'obtient donc en cherchant le conjugué  $B_2$  de  $B_1$  à partir de **l'intersection de deux des rayons particuliers** précédents issus de  $B_1$  et en menant la perpendiculaire à l'axe pour trouver la position de l'image  $A_2$  de  $A_1$ .

# Quelques constructions (1)

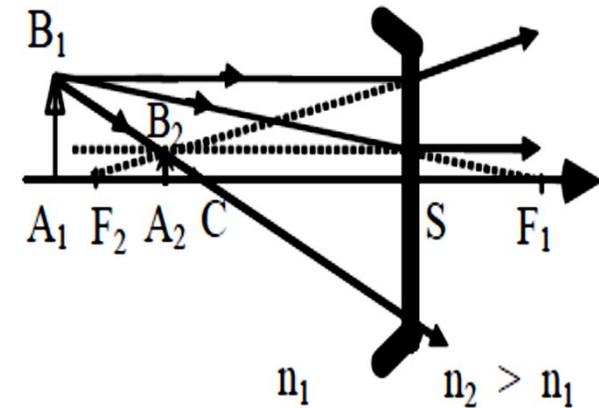
objet réel placé avant  $F_1$

**Dioptre convergent**



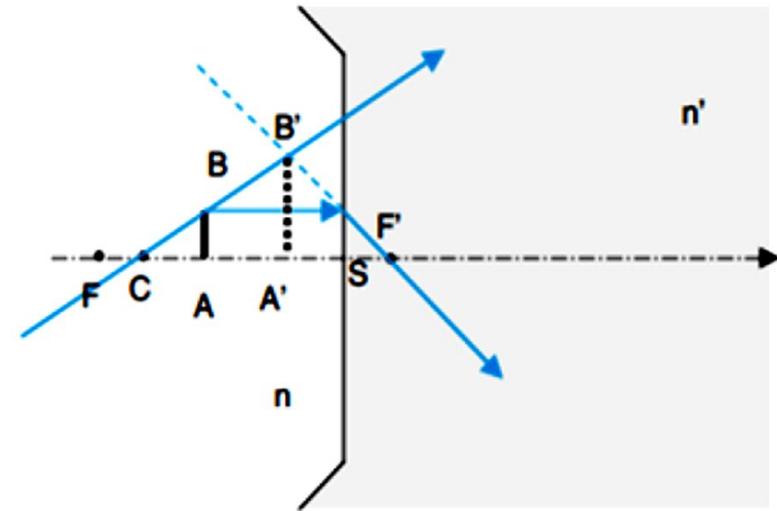
**L'image est réelle et renversée**

**Dioptre divergent**

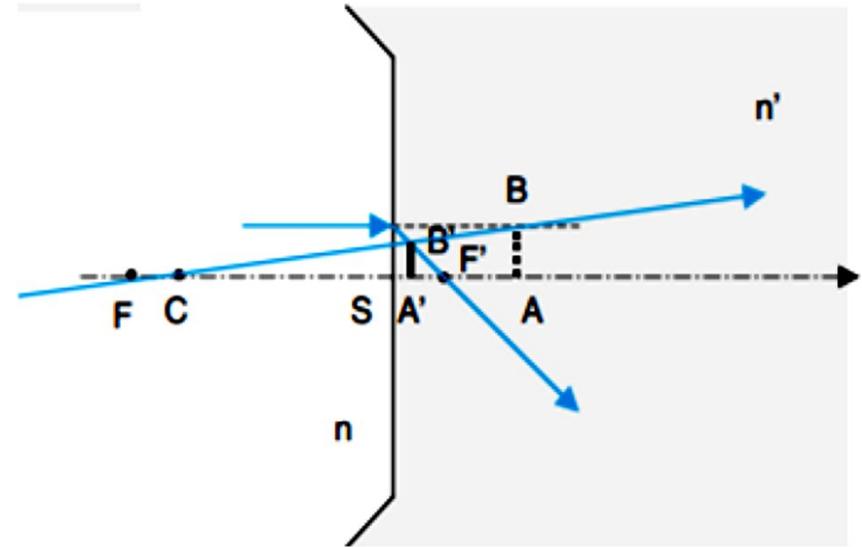


**L'image est virtuelle et de même sens que l'objet**

# Quelques constructions (2)

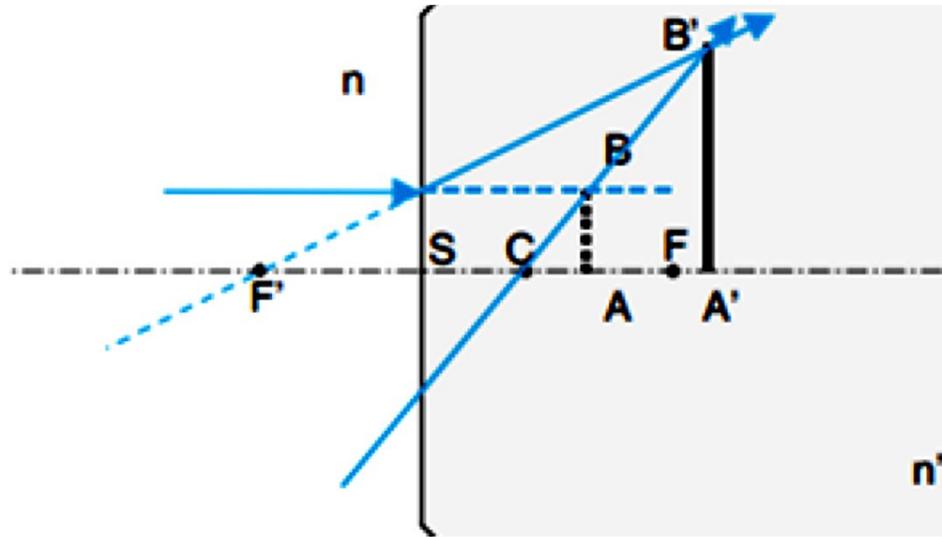


Dioptré concave convergent ( $n' < n$ ), **objet réel** placé après le foyer objet  $\rightarrow$  **image virtuelle et droite.**

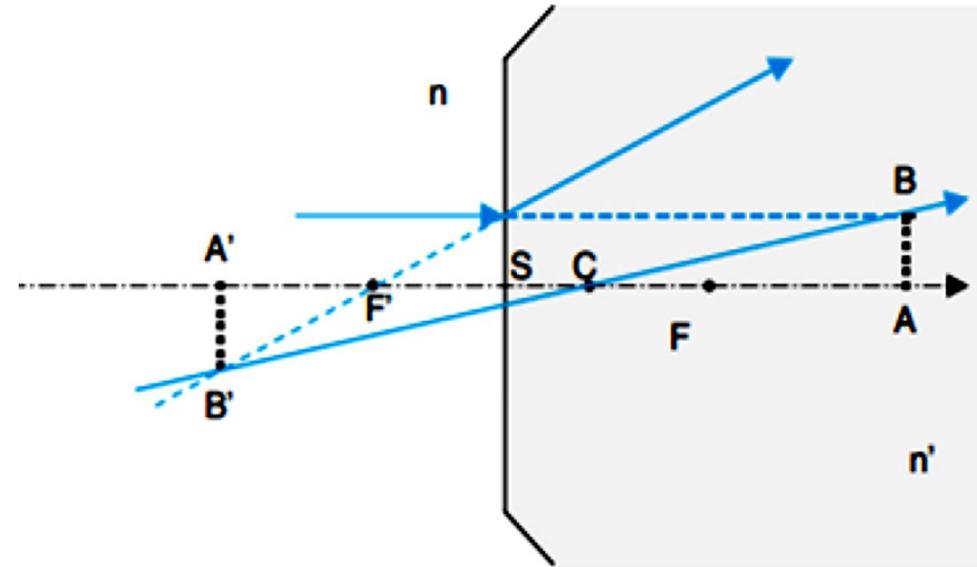


Dioptré concave convergent ( $n' < n$ ), **objet virtuel**  $\rightarrow$  **image réelle et droite.**

# Quelques constructions (3)



Dioptré convexe divergent ( $n' < n$ ), **objet virtuel** placé avant le foyer objet  $\rightarrow$  **image réelle et droite.**



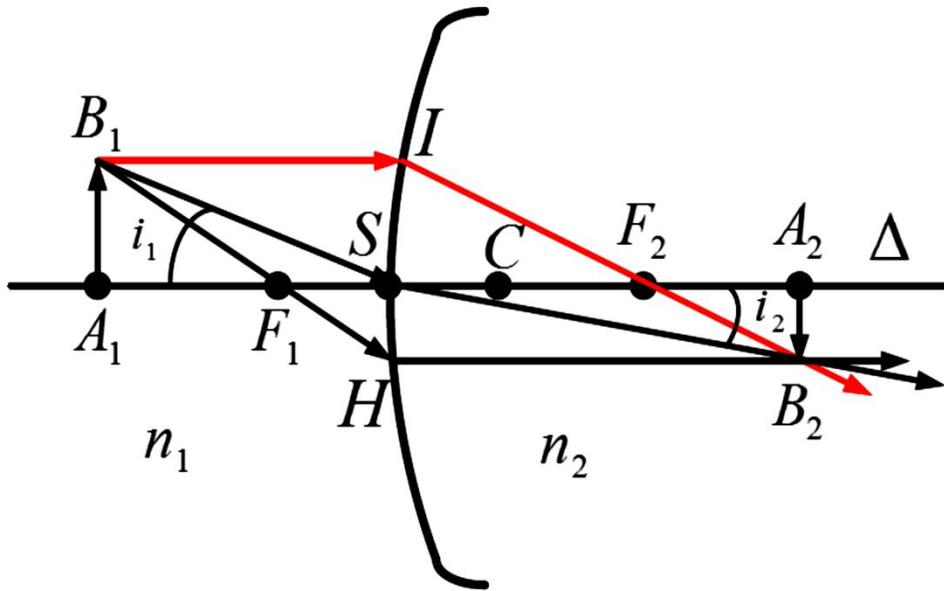
Dioptré convexe divergent ( $n' < n$ ), **objet virtuel** placé après le foyer objet  $\rightarrow$  **image virtuelle et renversée.**

---

# Grandissement linéaire transversal

---

# Avec origine au sommet S



On a :

$$\frac{A_1B_1}{SA_1} = \tan i_1$$

$$\frac{A_2B_2}{SA_2} = \tan i_2$$

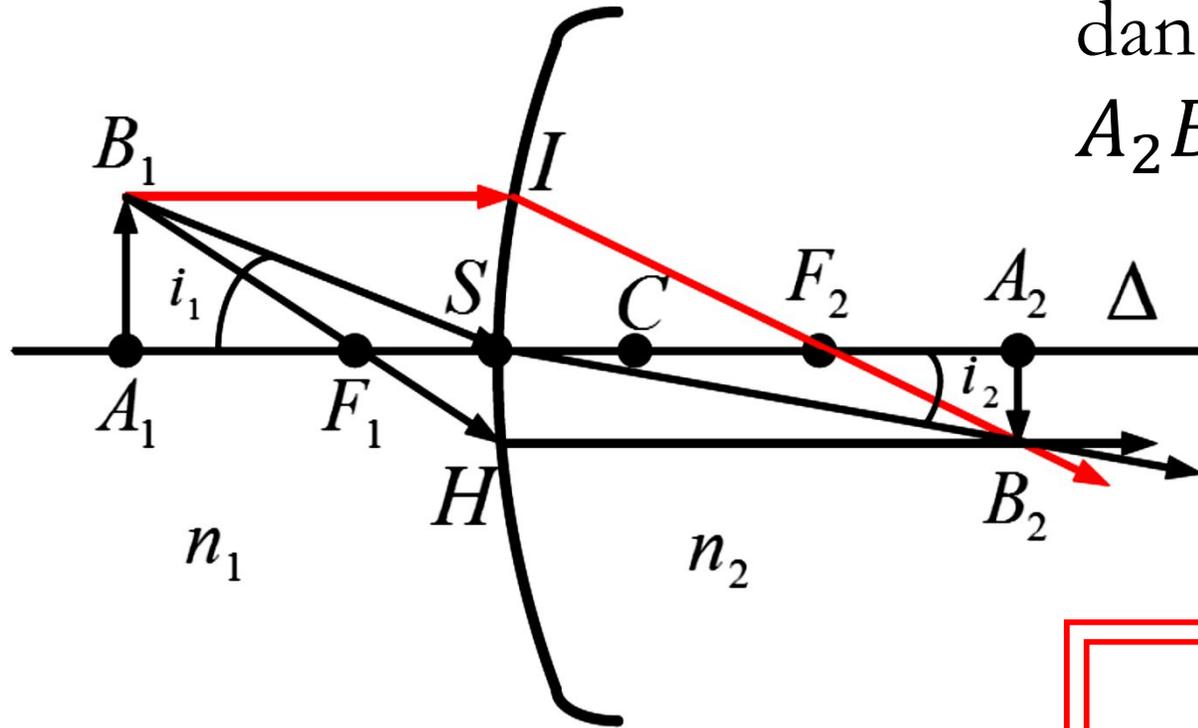
Dans les conditions de l'approximation de Gauss on a  $\tan i_1 \approx \sin i_1$  et  $\tan i_2 \approx \sin i_2$ .

On en déduit que :

$$n_1 \frac{A_1B_1}{SA_1} = n_2 \frac{A_2B_2}{SA_2} \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{n_1 \overline{SA_2}}{n_2 \overline{SA_1}}$$

# Avec origine au centre C

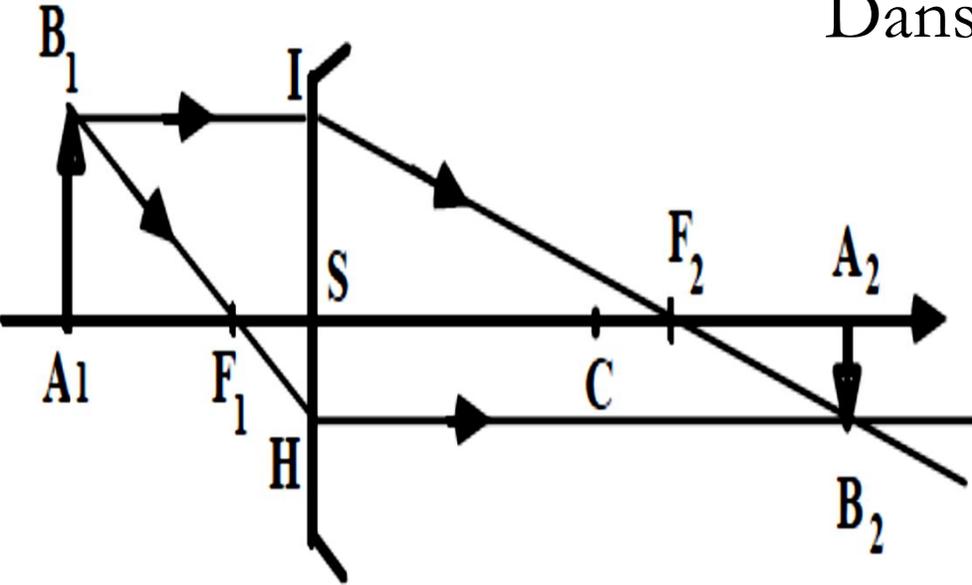


dans les triangles  $A_1B_1C$  et  $A_2B_2C$ , on a

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{CA_2}}{\overline{CA_1}}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{CA_2}}{\overline{CA_1}}$$

# Avec origine aux foyers



Dans les triangles  $F_1A_1B_1$  et  $F_1SH$ , on a :

$$\frac{\overline{SH}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{F_1S}}{\overline{F_1A_1}}$$

Dans les triangles  $F_2A_2B_2$  et  $F_1SI$ , on a :

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{F_2A_2}}{\overline{F_2S}}$$

Comme  $\overline{SH} = \overline{A_2B_2}$  et  $\overline{SI} = \overline{A_1B_1}$ , on obtient :

$$\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{F_1S}}{\overline{F_1A_1}} = \frac{\overline{F_2A_2}}{\overline{F_2S}}$$